THÉORIES ET MODÉLISATIONS IMMOBILIÈRES

INSTITUT DE L'ÉPARGNE IMMOBILIÈRE & FONCIÈRE

Les Chroniques de Christophe Pineau, Senior Advisor, IEIF

CHRONIQUE N°6

Le modèle de Gordon-Shapiro en immobilier (1/4)

Il est fréquent de rencontrer au détour d'un article immobilier des relations mathématiques découlant du modèle de Gordon-Shapiro sans qu'il en soit fait mention. Mais de quoi s'agit-il exactement ?

Le modèle de Gordon-Shapiro appliqué à l'immobilier nous dit que le rendement locatif net initial ($rdln_1$) est égal au rendement global (rdg) moins le taux de croissance du revenu locatif net (g). Ou encore, que le rendement global est égal au rendement locatif net initial augmenté du taux de croissance du revenu locatif net. Ou enfin, que le prix théorique initial du bien est égal au revenu locatif net initial divisé par la différence entre le taux d'actualisation (r) (qui se confond avec l'espérance de rendement global), moins le taux de croissance du revenu locatif net.

Tout cela sous deux hypothèses simplificatrices fortes. Le taux de croissance du revenu locatif net doit être strictement constant dans le temps et l'horizon de calcul, donc de placement, doit être infini.

$$rdln_1 = rdg - g \Leftrightarrow rdg = rdln_1 + g \Leftrightarrow P_0 = \frac{rvln_1}{r - g}$$

Le modèle de Gordon-Shapiro (1956)[1] a initialement été élaboré pour estimer le prix d'une action. Il peut être facilement adapté à la valorisation d'un bien, son point de départ étant la méthode de valorisation par les cash-flows actualisés.

$$(1)\ P_0 = \frac{rvln_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)}$$

Avec :
- P_0 : le prix aujourd'hui
- P_1 : le prix à la fin de la période 1
- $rvln_1$: le revenu net locatif pendant la période 1
- r : le taux d'actualisation

Et donc par définition :

[1] Gordon M.J. et E. Shapiro, (1956) "Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit", Management Science, 3, pp. 17–35.

$$(2)\ P_1 = \frac{rvln_2}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)}$$

Avec :

	P_1	: le prix à la fin de la période 1
	P_2	: le prix à la fin de la période 2
	$rvln_2$	: le revenu net locatif pendant la période 2
	r	: le taux d'actualisation

Si je remplace (2) dans (1) je trouve :

$$(3)\ P_0 = \frac{rvln_1}{(1+r)} + \frac{\ }{(1+r)} . \left(\frac{rvln_2}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)}\right)$$

$$(4)\ P_0 = \frac{rvln_1}{(1+r)} + \frac{rvln_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}$$

Soit la formule générale suivante, si je poursuis jusqu'à T périodes :

$$(5)\ P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{rvln_t}{(1+r)^t} + \frac{P_T}{(1+r)^T}$$

Et si je poursuis à l'infini :

$$(6)\ P_0 = \frac{rvln_1}{(1+r)} + \frac{rvln_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rvln_t}{(1+r)^t} + \cdots$$

On aboutit la formule générale :

$$(7)\ P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{rvln_t}{(1+r)^t}$$

Le prix d'aujourd'hui est égale à la somme actualisée des revenus futurs.

Jusque-là, rien d'extraordinaire pour toute personne qui connait un peu les mathématiques financières. Pour les autres, sachez que cette formule qui définit le prix comme la somme actualisée des revenus futurs d'un bien ou de tout autre placement est la clé de voûte de l'analyse financière moderne. Comme nous ne connaissons en général pas les revenus futurs, elle est le plus souvent présentée en « espérance ». C'est-à-dire que le prix d'aujourd'hui doit être égal à l'« espérance » actualisée des revenus futurs, soit la valeur moyenne la plus probable des revenus futurs.

C'est en partie, et en partie seulement, l'une des raisons pour lesquelles il y a des vendeurs et des acheteurs sur un marché, car ils ne partagent pas la même « espérance » de revenus futurs et donc n'ont pas le même avis, ni sur le « bon » prix aujourd'hui, ni sur la valeur à terme du bien.

L'hypothèse simplificatrice introduite par Gordon-Shapiro est que le revenu net croit à un rythme constant g. soit :

$$(8)\ rvln_t = (1+g)^t . rvln_0 = (1+g)^{t-1} . rvln_1$$

Avec : g : le taux de croissance constant du revenu

Ainsi l'équation (7) peut s'écrire :

$$(9)\ P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{t-1} . rvln_1}{(1+r)^t} = \frac{rvln_1}{1+r} . \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+r)^{t-1}}$$

On sait par ailleurs que toute suite géométrique de raison x, avec x inférieur à 1, satisfait à l'égalité suivante :

$$(10)\ \sum_{t=0}^{\infty} x^t = \frac{1}{1-x}$$

Si j'applique (10) à (9) avec $x = \frac{(1+g)}{(1+r)}$:

$$(11)\ P_0 = \frac{rvln_1}{1+r} . \frac{1}{1 - \frac{(1+g)}{(1+r)}} = \frac{rvln_1}{1+r} . \frac{1}{\frac{(1+r)-(1+g)}{(1+r)}}$$

Et donc en simplifiant :

$$(12)\ P_0 = \frac{rvln_1}{r-g}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(13)\ \frac{rvln_1}{P_0} = rdln = r - g$$

Par définition le taux d'actualisation r doit être égal au taux sans risque auquel on ajoute une prime de risque lié au produit ou à l'activité concernée. Donc le taux d'actualisation doit être égal à ce que nous nommons l'espérance de rendement global (cf Chronique n°1). En fait, il existe des liens très fort entre de nombreux concepts proches que nous étudierons ultérieurement : le taux d'actualisation, le rendement global, le rendement souhaité (*required return*), le TRI…
Si la formule de Gordon-Shapiro est simple à écrire et à utiliser, il ne faut pas perdre de vue ses limites qui découlent des hypothèses que nous avons dû faire.

La première, la plus évidente, tient au fait qu'il faut que le taux de croissance du revenu locatif soit constant.

La seconde, moins évidente mais aux conséquences importantes, résulte de ce que la simplification effectuée par Gordon-Shapiro n'est possible que pour un horizon de temps infini…

Nous étudierons dans nos prochaines Chroniques les conséquences et la crédibilité de ces deux hypothèses.

Ces chroniques sont directement liées à mon activité de recherche à l'IEIF, un centre d'études, recherche et de prospective en immobilier. J'y mène des travaux sur la modélisation des grandes variables immobilières.
Pour les moins familiers de l'analyse immobilière, ces chroniques peuvent constituer une source d'information et une base de connaissances. Pour les experts du domaine, elles ont pour but de lancer des discussions et des échanges sur les différents sujets que j'aborde.
Certaines chroniques s'appuieront sur des éléments connus et maîtrisés, d'autres traiteront d'éléments de recherche et présenteront certains résultats de mes travaux.